Proceedings of IAM, V.10, N.2, 2021 pp.135-148

ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ШЕСТОГО ПОРЯДКА С ДВОЙНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

А.С. Фараджев

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет, Баку, Азербайджан ,
email: a.farajov@mail.ru

Резюме: Исследуется одна краевая задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией и интегральных условий . Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: Уравнения Буссинеска шестого порядка, существование, единственность, классическое решение.

AMS Subject Classification: 35G15.

1. Введение. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению краевых задач для уравнений в частных производных. Поэтому теория краевых задач в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка .

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости обобщения классических задач математической физики, а также к постановке качественно новых задач, к которым можно отнести нелокальные задачи для дифференциальных уравнений. Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями. Нелокальные интегральные условия описывают поведение решения во внутренних точках области в виде некоторого среднего. Такого рода интегральные условия встречаются при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания процесса недоступна для непосредственных измерений. Примером могут служить задачи, возникающие при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме [6], процессов распространения тепла [1, 4], процесса влагопереноса в капиллярно-простых средах [5], а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

2. Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче.

Рассмотрим уравнение [2]

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)-u_{ttxx}(x,t)+u_{xxxx}(x,t)+u_{ttxxxx}(x,t)=f(x,t) \qquad (1)$$

в области $D_T=\{(x,t):0\le x\le 1, 0\le t\le T\}$ и поставим для него краевую задачу с нелокальными начальными условиями

$$u(x,0)=\int_0^T P_1(t)u(x,t)dt+\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\int_0^T P_2(t)u(x,t)dt+\psi(x)\ \ (0\le x\le 1)\ ,(2)$$

граничными условиями типа Неймана

$$u_x(0,t)=0,\ u_x(1,t)=0,\ u_{xxx}(0,t)=0 \qquad (0\le t\le T) \qquad (3)$$

и нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 u(x,t)dx=0 \quad (0\le t\le T), \qquad (4)$$

Где $P_1(t)$, $P_1(t)$, $\varphi(x),\psi(x),\ f(x,t)$-заданные функции, а $u(x,t)$-искомая функция.

Определение. Под классическим решением задачи (1)-(4) понимаем функцию $u(x,t)$, непрерывную в замкнутой области D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1) и удовлетворяющую условиям (1)-(4) в обычном смысле.

Справедлива следующая

Лемма 1. *Пусть* $P_1(t),P_2(t)\in C[0,T]$,

$$D\equiv\begin{vmatrix}1-\int_0^T P_1(t)\cos t dt & -\int_0^T P_1(t)\sin t dt\\ -\int_0^T P_2(t)\cos t dt & 1-\int_0^T P_2(t)\sin t dt\end{vmatrix}\ne 0,$$

$$D_1\equiv\begin{vmatrix}-\int_0^T tP_1(t)dt & 1-\int_0^T P_1(t)dt\\ 1-\int_0^T tP_2(t)dt & \int_0^T P_2(t)dt\end{vmatrix}\ne 0$$

$$\varphi(x)\in C^3[0,1],\varphi'''(1)=0,\ \int_0^1\varphi(x)dx=0,$$

$$\psi(x)\in C^3[0,1],\ \psi'''(1)=0\ \int_0^1\psi(x)dx=0,$$

$$f(x,t) \in C(D_T), \ \int_0^1 f(x,t)dx = 0 \ (0 \le t \le T).$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)$, из (1)-(3),

$$u_{xxx}(1,t) = 0 \ (0 \le t \le T). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ является классическим решением задачи (1)-(4). Интегрируем уравнение (1) от 0 до 1 по x, имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx - \alpha(u_{ttx}(1,t) - u_{ttx}(0,t)) + u_{xxx}(1,t) - u_{xxx}(0,t) +$$

$$+ u_{ttxxx}(1,t) - u_{ttxxx}(0,t) = \int_0^1 f(x,t)dx. \tag{6}$$

Отсюда, с учётом $\int_0^1 f(x,t)dx = 0 \ (0 \le t \le T)$, (3) и (4) имеем:

$$u_{ttxxx}(1,t) + u_{xxx}(1,t) = 0 \ (0 \le t \le T)$$

или

$$y''(t) + y(t) = 0 \quad (0 \le t \le T), \tag{7}$$

где

$$y(t) = u_{xxx}(1,t) \ (0 \le t \le T). \tag{8}$$

Легко видеть, что общее решение имеет вид:

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \ (0 \le t \le T). \tag{9}$$

Теперь ,с учетом $\varphi'''(1) = 0, \ \psi'''(1) = 0$, находим:

$$y(0) - \int_0^T P_1(t)y(t)dt = u_{xxx}(1,0) - \int_0^T P_1(t)u_{xxx}(1,t)dt = \varphi'''(1) = 0,$$

$$y'(0) - \int_0^T P_2(t)y(t)dt = u_{txxx}(1,0) - \int_0^T P_2(t)u_{xxx}(1,t)dt = \psi'''(1) = 0. \tag{10}$$

Далее, из (9) и (10) получаем:

$$y(0) - \int_0^T P_1(t)y(t)dt = C_1 - \int_0^T P_1(t)(C_1 \cos t + C_2 \sin t)dt = 0$$

$$y'.(0) + \delta_1 y'(T) = C_2 - \int_0^T P_2(t)(C_1 \cos t + C_2 \sin t)dt = 0$$

или

$$\begin{cases} C_1\left(1-\int_0^T P_1(t)\cos t dt\right) -C_2\int_0^T P_1(t)\sin t dt = 0 \\ -C_1\int_0^T P_2(t)\cos t dt + C_2\left(1-\int_0^T P_1(t)\sin t dt\right) = 0 \end{cases}.$$

Так как $D \neq 0$ из система находим: $C_1 = C_2 = 0$. Подставляя $C_1 = C_2 = 0$ в (9) , получаем: $y(t) = 0 \quad (0 \le t \le T)$. Из (8) легко приходим к выполнению (5).

Теперь, предположим, что $u(x,t)$ является решением задачи (1)- (3), (5).

Тогда из (6), с учетом (3), (5), имеем:

$$y''(t) = 0 \quad (0 \le t \le T), \tag{11}$$

где

$$y(t) = \int_0^1 u(x,t)dx \ \ (0 \le t \le T). \tag{12}$$

В силу (2) и $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$, $\int_0^1 \psi(x)dx = 0$, получаем:

$$y(0) - \int_0^T P_1(t)y(t)dt = \int_0^1 \left(u(x,0) - \int_0^T P_1(t)u(x,t)dt\right)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 0,$$

$$y'(0) - \int_0^T P_2(t)y(t)dt = \int_0^1 \left(u_t(x,0) - \int_0^T P_2(t)u(x,t)dt\right)dx = \int_0^1 \psi(x)dx = 0 \tag{13}$$

Общее решение имеет вид:

$$y(t) = C_1 t + C_2 \ \ (0 \le t \le T) \ . \tag{14}$$

Далее, из (13) и (14) получаем:

$$\begin{cases} -C_1\int_0^T tP_1(t)dt + C_2\left(1-\int_0^T P_1(t)dt\right) = 0 \\ -C_1\left(1-\int_0^T tP_1(t)dt\right) - C_2\int_0^T P_2(t)\cos t dt = 0 \end{cases}.$$

Так как $D_1 \neq 0$ из система находим: $C_1 = C_2 = 0$. Подставляя $C_1 = C_2 = 0$ в (14) , получаем: $y(t) = 0 \quad (0 \le t \le T)$. Отсюда, в силу (12), легко приходим к выполнению (4). Лемма доказана.

3. Единственность решения задачи.

Теорема 1. Если $P_1(t) = P_2(t) \equiv 0\,(0 \le t \le T)$, тогда задача (1)-(3),(5) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(3),(5) имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Допустим, что существуют два решения рассматриваемой задачи: $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и рассмотрим разность $v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, что удовлетворяет однородному уравнению

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) + +u_{ttxxxx}(x,t) = 0 \qquad (15)$$

и условиям:

$$u_x(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 0,\ u_{xxx}(0,t) = 0\ ,u_{xxx}(1,t) = 0 \quad (0 \le t \le T), \qquad (16)$$

$$v(x,0) = \int_0^T P_1(t)v(x,t)dt,\ \ v_t(x,0) = \int_0^T P_2(t)v(x,t)dt\ (0 \le x \le 1)\ . \qquad (17)$$

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Умножим обе части уравнения (15) на функцию $2v_t(x,t)$ и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до 1 :

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx - 2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx - 2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx +$$

$$+2\int_0^1 v_{xxxx}(x,t)v_t(x,t)dx + 2\int_0^1 v_{ttxxxx}(x,t)v_t(x,t)dx = 0\ (0 \le t \le T)\ . \qquad (18)$$

Пользуясь граничными условиями (16) имеем:

$$2\int_0^1 v_{tt}(x,t)v_t(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx\ (0 \le t \le T);$$

$$2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_t(x,t)dx = 2(v_{ttx}(1,t)v_t(1,t) - v_{ttx}(0,t)v_t(0,t)) -$$

$$-2\int_0^1 v_{ttx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx = -\frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx\ (0 \le t \le T);$$

$$2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_t(x,t)dx = 2(v_x(1,t)v_t(1,t) - v_x(0,t)v_t(0,t)) -$$

$$-2\int_0^1 v_x(x,t)v_{tx}(x,t)dx = -\frac{d}{dt}\int_0^1 v_x^2(x,t)dx\ (0 \le t \le T);$$

$$2\int_0^1 v_{xxxx}(x,t)v_t(x,t)dx = 2(v_{xxx}(1,t)v_t(1,t) - v_{xxx}(0,t)v_t(0,t)) -$$

$$-2\int_0^1 v_{xxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx = -2\int_0^1 v_{xxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx =$$

$$= -2(v_{xx}(1,t)v_{tx}(1,t) - v_{xx}(0,t)v_{tx}(0,t)) + 2\int_0^1 v_{xx}(x,t)v_{txx}(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{xx}^2(x,t))dx, (0 \le t \le T),$$

$$2\int_0^1 v_{ttxxxx}(x,t)v_t(x,t)dx = 2(v_{ttxxx}(1,t)v_t(1,t) - v_{ttxxx}(0,t)v_t(0,t)) -$$

$$-2\int_0^1 v_{ttxxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx = -2\int_0^1 v_{ttxxx}(x,t)v_{tx}(x,t)dx =$$

$$= -2(v_{ttxx}(1,t)v_{tx}(1,t) - v_{ttxxx}(0,t)v_{tx}(0,t)) + 2\int_0^1 v_{ttxx}(x,t)v_{txx}(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{txx}^2(x,t)dx \ (0 \le t \le T).$$

Тогда, из (18) имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_x^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx +$$

$$+ \frac{d}{dt}\int_0^1 v_{txx}^2(x,t)dx = 0 \ \ (0 \le t \le T)$$

или

$$y(t) \equiv \int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int_0^1 v_x^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx +$$

$$+ \int_0^1 v_{txx}^2(x,t)dx = C \ \ (0 \le t \le T).$$

Отсюда, с учетом (17), получаем:

$$y(0) = \int_0^1 v_t^2(x,0)dx + \int_0^1 v_x^2(x,0)dx + \int_0^1 v_{tx}^2(x,0)dx + \int_0^1 v_{xx}^2(x,0)dx +$$

$$+ \int_0^1 v_{txx}^2(x,0)dx = 0.$$

Таким образом:

$$y(0) = C = 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 v_t^2(x,t)dx + \int_0^1 v_x^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{tx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{xx}^2(x,t)dx + \int_0^1 v_{txx}^2(x,t)dx \equiv 0$$

Отсюда, заключаем, что

$$v_t(x,t) \equiv 0, v_x(x,t) \equiv 0, v_{tx}(x,t) \equiv 0, v_{xx}(x,t) \equiv 0,$$
$$v_{txx}(x,t) \equiv 0 \ \ (0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T).$$

Откуда, следует тождество

$$v(x,t) = const = C_0 \ \ (0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T)..$$

Пользуясь нелокальным условиям (6), имеем:

$$v(x,0) = C_0 = 0\,.$$

Тем самым доказано, что

$$v(x,t) = 0 \ \ (0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T)..$$

Таким образом, если существуют два решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ задачи (1)-(3),(5), то $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$. Отсюда следует, что если решение задачи (1)-(3),(6) существует, то оно единственное. Теорема доказана.

С помощью леммы 1, из последней теоремы немедленно вытекает единственность исходной задачи (1)-(5).

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и

$$\varphi(x) \in C^3[0,1], \varphi'''(1) = 0,\ \int_0^1 \varphi(x)dx = 0\,,$$

$$\psi(x) \in C^3[0,1],\ \ \psi'''(1) = 0\ \ \int_0^1 \psi(x)dx = 0\,,$$

$$f(x,t) \in C(D_T)\,,\ \ \int_0^1 f(x,t)dx = 0 \ \ (0 \le t \le T)\,.$$

Тогда задача (1)-(4) не может иметь более одного классического решения.

4.Разрешимость краевой задачи

Классическое решение задачи (1)-(3), (5) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x\,, \tag{19}$$

где

$$u_k(t) = m_k \int_0^1 u(x,t) \cos \lambda_k x dx \ \ (k = 0,1,2,...)\,,$$

причём $$m_k = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 2, & k=1,2,\ldots. \end{cases}$$

Применяя формальный метод Фурье, из (1), (2) получаем:

$$(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)u_k''(t)+(\lambda_k^2+\lambda_k^4)u_k(t)=f_k(t), \quad k=0,1,2\ldots; \ 0\le t\le T, \tag{20}$$

$$u_k(0)=\varphi_k+\int_0^T P_1(t)u_k(t)dt, \quad u_k'(0)=\psi_k+\int_0^T P_2(t)u_k(t)dt, \quad k=0,1,2\ldots. \tag{21}$$

где

$$f_k(t)=m_k\int_0^1 f(x,t)\cos\lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k=m_k\int_0^1\varphi(x)\cos\lambda_k x dx, \quad \psi_k(t)=m_k\int_0^1\psi(x)\cos\lambda_k x dx, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Решая задачу (20),(21) находим:

$$u_0(t)=\varphi_0+\int_0^T P_1(t)u_0(t)dt+t\left(\psi_0+\int_0^T P_2(t)u_0(t)dt\right)+\int_0^t (t-\tau)f_0(\tau)d\tau, \tag{22}$$

$$u_k(t)=\left(\varphi_k+\int_0^T P_1(t)u_k(t)dt\right)\cos\beta_k t+\frac{1}{\lambda_k}\left(\psi_k+\int_0^T P_2(t)u_k(t)dt\right)\sin\beta_k t$$

$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)}\int_0^t f_k(\tau)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau, \quad k=1,2,\ldots, \ 0\le t\le T, \tag{23}$$

где

$$\beta_k=\frac{\lambda_k^2+\lambda_k^4}{1+\lambda_k^2+\lambda_k^4}.$$

После подстановки выражения $u_k(t)\ (k=0,1,\ldots)$ в (19), для определения $u(x,t)$ решения $u(x,t)$ задачи (1)- (3), (5) получаем:

$$u(x,t)=\left(\varphi_0+\int_0^T P_1(t)u_0(t)dt\right)+t\left(\psi_0+\int_0^T P_2(t)u_0(t)dt\right)+\int_0^t (t-\tau)f_0(\tau)d\tau+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left(\varphi_k+\int_0^T P_1(t)u_k(t)dt\right)\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\left(\psi_k+\int_0^T P_2(t)u_k(t)dt\right)\sin\beta_k t\right.$$

$$+\frac{1}{\beta_k(1+\lambda_k^2+\lambda_k^4)}\int_0^t f_k(\tau)\sin\lambda_k(t-\tau)d\tau\Bigg\}\cos\lambda_k x. \qquad (24)$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (5) свелось к решению (24).

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (5) важную роль играет следующая

Лемма 2. Если $u(x,t)$ – любое решение задачи (1)-(3), (5), то функции

$$u_k(t)=m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \quad (k=0,1,...)$$

удовлетворяют системе, состоящей из уравнений (22), (23).

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – любое решение задачи (1)-(3), (5). Тогда умножив обе части уравнения (1) на функцию $m_k\cos\lambda_k x$ $(k=0,1,2,\ldots)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$m_k\int_0^1 u_{tt}(x,t)\cos\lambda_k x dx=\frac{d^2}{dx^2}\left(m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=u_k''(t)\ \ (k=0,1,2\ldots),$$

$$m_k\int_0^1 u_{xx}(x,t)\cos\lambda_k x dx=-\lambda_k^2\left(m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=-\lambda_k^2 u_k(t)\ \ (k=0,1,2\ldots),$$

$$m_k\int_0^1 u_{ttxx}(x,t)\cos\lambda_k x dx=-\lambda_k^2\left(m_k\int_0^1 u_{tt}(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=-\lambda_k^2 u_k''(t)\ \ (k=0,1,2\ldots),$$

$$m_k\int_0^1 u_{xxx}(x,t)\cos\lambda_k x dx=\lambda_k^4\left(m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=\lambda_k^4 u_k(t)\ \ (k=0,1,2\ldots),$$

$$m_k\int_0^1 u_{ttxxxx}(x,t)\cos\lambda_k x dx=\lambda_k^4\left(m_k\int_0^1 u_{tt}(x,t)\cos\lambda_k x dx\right)=\lambda_k^4 u_k''(t)\ \ (k=0,1,2\ldots),$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (20).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (21).

Таким образом, $u_k(t)$ $(k=0,1,2,...)$ является решением задачи (20), (21). А отсюда, непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (22), (23). Лемма доказана.

Очевидно, что если $u_k(t)=m_k\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx \ (k=0,1,2,...)$ является решением системы (22), (23), то $u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos\lambda_k x$ является решением (24).

Из леммы 2следует, что имеет место следующее

Следствие. Пусть система (24) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(3), (5) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(3), (5) имеет решение, то оно единственно.

1. Обозначим через $B_{2,T}^5$ [6] совокупность всех функций вида

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\cos\lambda_k x \ (\lambda_k = k\pi),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t) \ (k=0,1,\dots)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J(u)=\|u_0(t)\|_{C[0,T]}+\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^5} = J_T(u).$$

Теперь рассмотрим в пространстве $B_{2,T}^5$ оператор

$$\Phi(u,a,b)=\tilde{u}(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{u}_k(t)\cos\lambda_k x, \quad ,$$

а $\tilde{u}_0(t)$ и $\tilde{u}_k(t)$ и равны соответственно правым частям (22) и (23).

Очевидно, что

$$\frac{1}{\sqrt{3}}<\beta_k<\sqrt{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1}{\beta_k}<\sqrt{3} \cdot$$

Тогда, имеем:

$$\|\tilde{u}_0(t)\|_{C[0,T]} \le |\varphi_0|+T|\psi_0|+T\sqrt{T}\left(\int_0^T |f_0(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+T\left(\|P_1(t)\|_{C[0,T]}+T\|P_2(t)\|_{C[0,T]}\right)\|u_0(t)\|_{C[0,T]}, \qquad (25)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|\tilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{5}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{15}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{15T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|f_k(\tau)|)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{5}(\|P_1(t)\|_{C[0,T]}+\sqrt{3}\|P_2(t)\|_{C[0,T]})T\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

Предположим, что данные задачи (1)- (3), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in C^4[0,1],\ \varphi^{(5)}(x)\in L_2(0,1),\ \varphi'(0)=\varphi'(1)=\varphi'''(0)=\varphi'''(1)=0;$
2. $\psi(x)\in C^4[0,1],\ \psi^{(5)}(x)\in L_2(0,1),\ \psi'(0)=\psi'(1)=\psi'''(0)=\psi'''(1)=0;$
3. $f(x,t)\in C(D_T),\ \ f_x(x,t)\in L_2(D_T);$
4. $P_1(t), P_2(t)\in C[0,T].$

Тогда из (17)-(18) имеем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B^5_{2,T}} \le A(T)+B(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \tag{27}$$

где

$$A_1(T)=\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}+T\sqrt{T}\|f(x,t)\|_{L_2(D_T)}$$
$$+\sqrt{5}\|\varphi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\sqrt{15}\|\psi^{(5)}(x)\|_{L_2(0,1)}+\sqrt{15T}\|f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$
$$C_1(T)=T(1+\sqrt{5})\|P_1(t)\|_{C[0,T]}+T(T+\sqrt{15})\|P_2(t)\|_{C[0,T]}.$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1-4 и

$$(A(T)+2)B(T)<1. \tag{28}$$

Тогда задача (1)-(3),(5) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^5}\le R=A(T)+2)$ пространства E_T^5 единственное решение.

Доказательство. В пространстве $B^5_{2,T}$ рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \tag{29}$$

где $z=\{u\}$, оператора $\Phi(u)$ определены правыми частями уравнений (24).

Рассмотрим оператор $\Phi(u)$ в шаре $K=K_R$ из $B^5_{2,T}$. Аналогично (27) получаем, что для любых $z, z_1, z_2\in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{B^5_{2,T}} \le A(T)+B(T)\|u(x,t)\|_{B^5_{2,T}}, \tag{30}$$

$$\left\|\Phi z_1 - \Phi z_2\right\|_{B_{2,T}^5} \leq B(T)\left\|u_1(x,t) - u_2(x,t)\right\|_{B_{2,T}^5} \tag{31}$$

Тогда, из оценок (30), (31), с учетом (28), следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u\}$, которая является в шаре $K = K_R$ единственным решением уравнения (29), т.е $\{u\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (24).

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^5$, имеет непрерывные производные $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$ в D_T.

Из (11) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^5\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\sqrt{2}\left\|\| f_x(x,t)\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t), u_{ttx}(x,t), u_{ttxx}(x,t), u_{ttxxx}(x,t), u_{ttxxxx}(x,t)$ непрерывны в D_T.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (5) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $u(x,t)$ является решением задачи (1)- (3), (5), причем, в силу следствие леммы 2, оно единственное в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью теорема 1 доказывается следующая

Теорема 4. Пусть выполняются все условия теоремы 3, $D \neq 0$, $D_1 \neq 0$ и

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 \psi(x)dx = 0, \quad \int_0^1 f(x,t)dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{B_{2,T}^5} \leq R = A(T) + 2)$ из $B_{2,T}^5$ единственное классическое решение.

Заключение: Рассматривается краевая задача для уравнения с частными производными шестого порядка типа Буссинеска с двойной дисперсией. Доказаны теоремы существование и единственности классического решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy, Quart. Appl. Math.., 1963, V. 5, N. 21, pp. 155–160.
2. Hatice Taskesen and Necat Polat. Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesq equation. Contemporary Analysis and Applied Mathematics . , 2013, V.1, N..1, pp. 60-69
3. Mehraliev Ya.T On an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation with integral condition, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. V. 77. pp. 145–156
4. Ионкин, Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием , Диф. уравнения., 1977, Т. 13, N. 2, pp. 294–304.
5. Нахушев, А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике померенной влаги и грунтовых вод .Диф. уравнения., 1982, Т. 18, N. 1, pp. 72–81.
6. Самарский, А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений , Диф. Уравнения,, 1980, Т. 16,N. 11,pp. 1925–1935.

PROBLEM FOR THE BOUSSINESQ EQUATION OF THE SIXTH ORDER WITH DOUBLE DISPERSION AND NON-LOCAL INTEGRAL CONDITIONS

Farajov A.S.

Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan

Abstract: One boundary-value problem for the Boussinesq equation of the six order with double variance and integral conditions is investigated. First, the initial problem is reduced to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness of solution is proved. Then, using these facts the existence and uniqueness of classical solution of the initial problem is proved.

Keywords: Boussinesq equation of the six order, existence, uniqueness, classical solution.

REFERENCES

1. Cannon, J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy, Quart. Appl. Math.., 1963, V. 5, N. 21, pp. 155–160.
2. Hatice Taskesen and Necat Polat. Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesq equation. Contemporary Analysis and Applied Mathematics . , 2013, V.1, N..1, pp. 60-69
3. Mehraliev Ya.T On an inverse boundary value problem for a second order elliptic equation with integral condition, Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math.

2012. V. 77. pp. 145–156

4. Ionkin, N.I. Reshenie odnoy kraevoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym usloviem , Dif. uravneniya., 1977, T. 13, N. 2, pp. 294–304. (Ionkin, N.I. Solution of a boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, Dif. Uravn., 1977, T. 13, No. 2, pp. 294-304) (in Russian)
5. Nakhushev, A.M. Ob odnom priblizhennom metode resheniya kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy i ego priblizheniya k dinamike pomerennoy vlagi i gruntovykh vod .Dif. uravneniya., 1982, T. 18, N. 1, pp. 72–81. (Nakhushev, A.M. An approximate method for solving boundary value problems for differential equations and its approximation to the dynamics of measured moisture and groundwater. Dif. Uravn., 1982, T. 18, No. 1, pp. 72-81) (in Russian)
6. Samarskiy, A.A. O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravneniy , Dif. Uravneniya,, 1980, T. 16,N. 11,pp. 1925–1935. (Samarsky, A.A. On some problems in the theory of differential equations, Dif. Equations ,, 1980, V. 16, N. 11, pp. 1925-1935.) (in Russian)